Domácí úkol ze cvičení 12

1. Derivace složené funkce více proměnných (pokud jste už nepočítali v minulém domácím úkolu nějaký příklad „na užití" řetízkového pravidla): určete parciální derivace 1.a 2. řádu funkce g , je-li

$$g(x,y) = f(x^2 + y, xy^2) \qquad \text{nebo} \qquad g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}) \ .$$

(Předpokládáme, že platí předpoklady pro užití „řetízkového" pravidla - jaké to jsou předpoklady?)

2 Zopakujte si, prosím, co „víte" z přednášky o lokálních a globálních extrémech funkcí více proměnných a zkuste vyřešit jeden příklad (z minulého domácího úkolu - extrémy jednoduché):

(i) Vyšetřete v R^2 globální i lokální extrémy následujících funkcí:

a) $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

b) $f(x,y) = 12xy - x^2y - xy^2$;

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$;

d) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$.

(ii) Vyšetřete globální extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ na množině $M = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$.

3. Implicitní funkce:

(i). Ukažte, že rovnicí $F(x,y) = 0$ je v okolí bodu (x_0, y_0) definována implicitně funkce $y = f(x)$.
Pak aproximujte funkci $f(x)$ v okolí bodu x_0 pomocí Taylorova polynomu 2.stupně, když

$$F(x,y) = xy - e^x + e^y, \qquad (x_0, y_0) = (0,0) \ .$$

(ii) A zkuste:

a) Je dána rovnice

$$e^{z-2x} - xz + 2yz - 2y - xy^2 = 0 \ .$$

Ukažte, že touto rovnicí je definována implicitně funkce $z = f(x,y) \in C^2(U(1,1))$, pro kterou je $f(1,1) = 2$.

b) Určete $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)$.

c) Pomocí lineární aproximace určete přibližně hodnoty $f(x,y)$ v okolí bodu $(1,1)$.